黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@ichi_cym/91758

モーメント母函数を考えるメリットについて

確率変数 H に対して、

$$Z(\beta) = E[e^{-\beta H}]$$

をモーメント母函数と呼んだり、分配函数と呼んだりします。さらに

$$\Psi(\beta) = \log Z(\beta)$$

をcumulant母函数と呼んだり、Massieu函数と呼んだりします。そして、重要なのは次の函数です：

$$S(u) := \inf_{\beta\in\mathbb{R}}(\beta u + \Psi(\beta)).$$

この $S(u)$ は相対エントロピーと呼ばれる量で次の定理を満たしています。

相対エントロピーという名前からもわかるように、非常に重要な量です。

続く

2017年05月11日 22:59 · Web · 1 · 4 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 11
続き。相対エントロピーの応用。

確率論におけるクラメールの定理：$H_1, H_2, \ldots$ は H と同じ確率分布に従う独立同分布な確率変数列であるとする。このとき A が正の長さ(無限大でもよい)を持つ区間のとき、

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H_k \in A\right)$$
$$= \exp\left(n \sup_{u\in A} S(u) + o(n)\right).$$

これはサンプルサイズが大きなとき、サンプル平均が A に入る確率の大きさは A の範囲内での最大相対エントロピーで決まっていることを意味しています。

こういう話をするためにはモーメント母函数から派生する様々な母函数が必須になります。

詳しくはリンク先のpdfの第6節を見て下さい。そう難しくない話です。

github.com/genkuroki/Sanov

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 11

以上で述べたような話は、普通の統計学の教科書にも、普通の統計力学の教科書にも載っていないんですね。だから、リンク先のノートを作って公開することにしました。LaTeXソースも全公開してあります。
github.com/genkuroki/Sanov

そこに書いてあることは完全に専門外です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 11

ところで、相対エントロピーの定義式

$$S(u) := \inf_{\beta\in\mathbb{R}}(\beta u + \log E[e^{-\beta H}]).$$

はマシュー函数 $\Psi(\beta) = \log E[e^{-\beta H}]$ のLegendre変換です。熱統計力学を学んでいれば類似の式を見たことがあるはずです。クラメールの定理はi.i.d.の設定における統計力学のおもちゃだとみなせます。

あと、凸函数論を勉強すると、ルジャンドル変換が基本的なことがわかるのですが、確率論におけるクラメールの定理(大偏差原理の１つ)に自然にルジャンドル変換が現われることから、その重要性を再認識できます。

この手の解説は、自分で言うのもちょっとアレなのですが、結構貴重だと思います。

その普遍的重要性の割に解説が見当たらない。みんな、エントロピーの概念とか、理解したいですよね。